תורת החוגים – תרגיל 3

שאלה 1. הראו כי ה-$\mathbb{Z}$-מודול $\mathbb{Q}$ אינו ארטיני ואינו נתרי.

שאלה 2. יהי M החבורה האבלית $M=\{\frac{a}{2^n} \mid a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$
ולכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ נגדיר תת-חבורה $M_k=\{\frac{a}{2^k} \mid a\in\mathbb{Z}\}$.
נחשוב על M ו-M_k כ-$\mathbb{Z}$-מודולים.

(א) הוכיחו כי לכל תת-מודול $N\le M$ המכיל את $M_0=\mathbb{Z}$
$N=M_k$ עבור $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ או $N=M$.
(רמז: התבוננו ב-n המקסימלי עבורו $\frac{1}{2^n}\in N$.)

(ב) הראו בעזרת (א) כי M/M_0 הוא $\mathbb{Z}$-מודול ארטיני שאינו נתרי.

שאלה 3. יהי R חוג, יהי $I\trianglelefteq R$ ויהי M R-מודול ימני.
נניח כי $MI=0$, כלומר, לכל $x\in M$ ו-$a\in I$, $xa=0$.
נגדיר פעולה ימנית $*: M\times(R/I)\longrightarrow M$ על ידי

$$x*(r+I)=x\cdot r$$

(א) הוכיחו כי $*$ מוגדרת היטב וכי M הוא R/I-מודול ביחס ל-$*$.

(ב) יהי $N\subseteq M$ תת-קבוצה. הוכיחו כי N הוא R-תת-מודול של M
$\Longleftrightarrow$ N הוא R/I-תת-מודול של M.

(ג) הוכיחו כי M נתרי (ארטיני) כ-R-מודול $\Longleftrightarrow$
M נתרי (ארטיני) כ-R/I-מודול.

שאלה 4. יהי M R-מודול נתרי. הוכיחו כי קיים תת-מודול ציקלי $N\le M$
כך שכל תת-מודול $N\subsetneq K\le M$ אינו ציקלי.

שאלה 5. יהי M R-מודול ויהי $\{M_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי-מודולים של M כך שלכל $i,j\in I$
מתקיים $M_i\subseteq M_j$ או $M_j\subseteq M_i$. הוכיחו כי $\bigcup_{i\in I}M_i$ הוא תת-מודול של M.

שאלה 6. יהי $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ (תת-חוג של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$).

(א) הראו כי R אינו ארטיני משמאל ואינו נותרי משמאל.

(רמז: התבוננו ב- $\begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ כאשר V הוא $\mathbb{Q}$-תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}$.)

(ב) הוכיחו כי האידיאלים הימניים של R הם:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_{\alpha,\beta} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha x \\ 0 & \beta x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

עבור $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(רמז: תארו את האידיאל הימני xR לכל $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in R$.)

סעיף זה הוא סעיף רשות!

(ג) הוכיחו בעזרת סעיף (ב) כי R נותרי מימין וארטיני מימין.

(ד) נתבונן בתת-החוג $S = \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$. הוכיחו כי S ארטיני ונותרי.

(ה) הראו כי R_S ("R כמודול ימני מעל S") נוצר סופית. הסיקו מכאן כי R נותרי וארטיני.